Über die räumliche Verteilung der Sterne

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU BERLIN

VON

LADISLAUS DUNST

AUS SZOMBATHELY (UNGARN)

Tag der Promotion: 6. März 1930.

1929

116

Über die räumliche Verteilung der Sterne

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU BERLIN

VON

LADISLAUS DUNST

AUS SZOMBATHELY (UNGARN)

Tag der Promotion: 6. März 1930.

1929

Referenten: Professor Dr. A. Kopff.
Professor Dr. E. Kohlschütter.

Tag der mündlichen Prüfung, 25. Juli 1929.

R. UNIV
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

BUDAPEST
STEPHANEUM BUCHDRUCKEREI UND VERLAGS A. G.
Direktor: Franz Kohl.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Einleitung --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 5

1. Die Sternzahlen $a(m)$ --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 6

2. Die Verteilungsfunktion der absoluten Größen --- --- --- --- --- --- 11

3. Einige Lösungen der Integralgleichung der Stellarstatistik --- --- 15

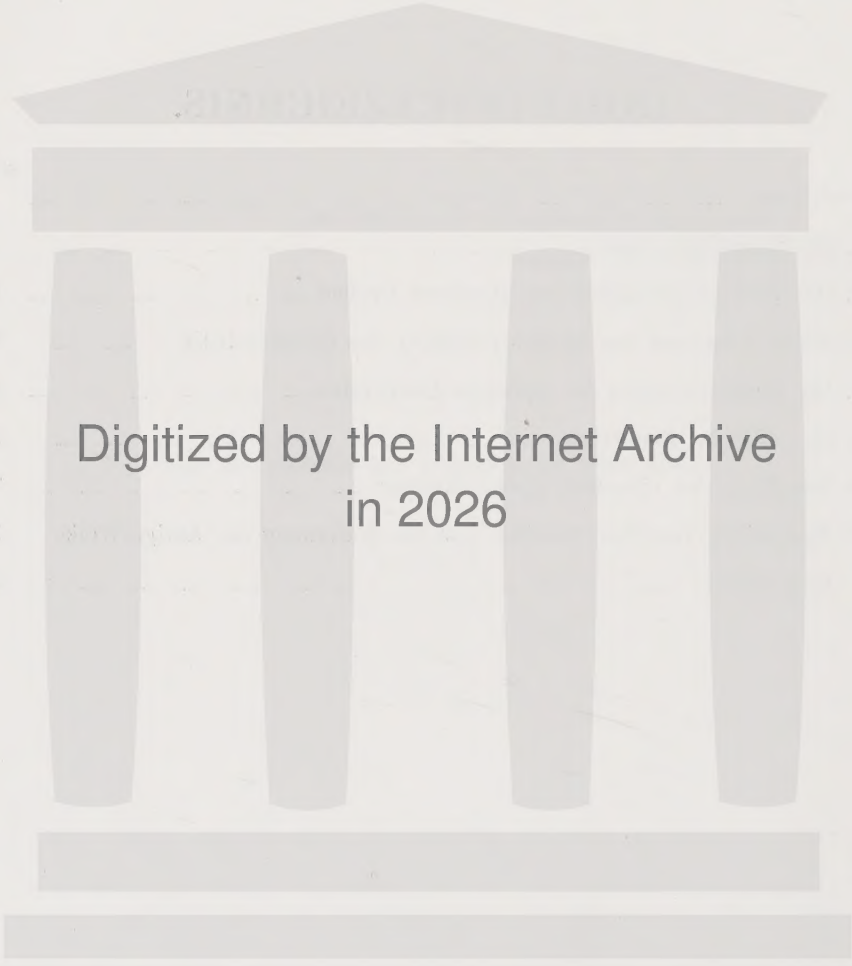
4. Die Dichteverteilung im typischen Sternsystem --- --- --- --- --- --- 18

5. Die mittleren Parallaxen --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 23

6. Verteilung der einzelnen Spektralklassen --- --- --- --- --- --- --- 25

7. Anwendung von Farbenindices und die Entfernung der Auriga-Wolke 31

Lebenslauf --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- 37


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550822_0137

EINLEITUNG.

Den sich auf die räumliche Verteilung der Sterne beziehenden Untersuchungen liegen hauptsächlich die beiden empirisch zu bestimmenden Funktionen $a(m)$ und $\varphi(M)$, definiert als die Anzahl der Sterne auf 10.000 Quadratgrad zwischen den scheinbaren Größen $m-\frac{1}{2}$ und $m+\frac{1}{2}$, bzw. als die Anzahl der Sterne in einem Kubikparsec in der Umgebung der Sonne zwischen den absoluten Größen $M-\frac{1}{2}$ und $M+\frac{1}{2}$ (M für 1 parsec), zugrunde. Die Dichtefunktion $D(r, M)$ wird so definiert, daß das Produkt $D(r, M) \cdot \varphi(M)$ der Anzahl der Sterne pro Kubikparsec in der Entfernung r parsec von der Sonne und zwischen den absoluten Größen $M-\frac{1}{2}$ und $M+\frac{1}{2}$ gleich wird. Dann ist $D(0, M) = 1$. Macht man die Annahme. welche später näher diskutiert wird, daß die Dichtefunktion von M unabhängig ist und keine Absorption des Lichtes im Raume stattfindet, so ist ihre Ermittlung aus der bekannten Integralgleichung

$$a(m) = k \int_0^{+\infty} D(r)\, r^2\, \varphi(m-5\log r)\, dr, \tag{1}$$

wo $k = \text{num log } 0{,}4838$ ist und die absolute Größe eines Sternes durch die Gleichung

$$M = m-5\log r \tag{2}$$

definiert ist, verhältnismäßig einfach, besonders, wenn $a(m)$ und $\varphi(M)$ einen regelmäßigen, stetigen Verlauf zeigen. Um eine eindeutige Lösung erhalten zu können, muß für $D(r)$ Stetigkeit vorausgesetzt werden. Solange wir aber die Einzelheiten außer acht lassen und nur einen mittleren Zustand des Sternsystems zu ermitteln streben, kann die Dichtefunktion als stetig angesehen werden. Es bedarf dann spezieller Untersuchungen, die Abweichungen von diesem allgemeinen Modell zu studieren.

Ein den allgemeinen Verhältnissen entsprechendes Modell wird erhalten, wenn man die Sternzahlen nach galaktischen Breiten zusammenfaßt und damit die in den einzelnen Längen auftretenden Unterschiede vernachlässigt. Dies ist das von Seeliger als typisch bezeichnete

Sternsystem. Darauf bezügliche Untersuchungen sind besonders von Kapteyn und Seeliger angestellt worden. Die ihren Ergebnissen zuzusprechende Verläßlichkeit hängt von der Genauigkeit der zugrunde gelegten empirischen Daten ab. Neuerdings ist eben in dieser Hinsicht ein großer Fortschritt gemacht worden. Die dem typischen Sternsystem entsprechende mittlere Sternverteilung ist von Seares und van Rhijn,[1] die Verteilungsfunktion $\psi(M)$ von van Rhijn[2] neu bestimmt.

Es ist daher von Interesse, diese Daten auf eine Bestimmung der räumlichen Dichteverteilung anzuwenden.

1. Die Sternzahlen $a(m)$.

Die Angaben für $a(m)$ sind in der Tabelle XXII der zitierten Arbeit von Seares und van Rhijn für die galaktischen Breiten 0°, 30°, 60° und 90° und für die Zonen zwischen den galaktischen Breiten 0°—20°, 20°—40°, 40—90° und 0°—90° enthalten. Im folgenden benutze ich nur die Zahlen bis $m = 18$, da die Zahlen für größere Werte von m durch Extrapolation gewonnen wurden. Auch diese weisen noch Mängel auf. Die Sternzahlen für $m > 13$ sind aus kleinen Feldern abgeleitet, die zwischen den Deklinationen $+90°$ und $-15°$ verteilt sind. Wegen der Kleinheit der Areale und der raschen Veränderlichkeit der Sternfülle mit dem Orte sind diese Zahlen einigermaßen durch die Auswahl der Areale in schwer feststellbarer Weise bedingt.

Wie rasch sich die Sternfülle mit dem Orte ändern kann, zeigen die Abzählungen in den einzelnen Auswahlfeldern am deutlichsten. Für jedes Areal liegen zwei Platten mit demselben Zentrum, aber von verschiedenen Gesichtsfeldern vor. Die auf der Mount Wilson-Sternwarte ausgemessenen Platten sind kreisförmig mit einem Durchmesser von 23′, während die in Groningen bearbeiteten von der Größe $15' \times 15'$ bzw. $20' \times 20'$ sind. Die zwei Arten von Platten decken sich also im größten Teile, sind aber doch nicht identisch. Bei 13 Auswahlfeldern gaben nun die Abzählungen auf den zwei Platten, wie die Tafeln I*a* und I*b* in M. Wils. Contr. 301. zeigen, einen erheblich verschiedenen Verlauf für $a(m)$. Diese Felder sind nach wachsender Breite angeordnet:

Feld 41, 63, 43, 66, 47, 125, 45, 61, 113, 28, 84, 53, 13.

Auch wenn die Sternzahlen für ein und dasselbe Areal in den zwei verschiedenen Gesichtsfeldern bei der Mehrzahl der Areale denselben

[1] F. H. Seares, P. J. van Rhijn, M. C. Joyner and M. L. Richmond: Mean Distribution of Stars according to Apparent Magnitude and Galactic Latitude. Mount Wilson Contr. 301. Aph. Journ. 62. p. 320. 1925.

[2] P. J. van Rhijn: On the Frequency of the Absolute Magnitudes of the Stars. Gron. Publ. 38. 1925.

Verlauf zeigen, kommen beträchtliche Unterschiede zwischen den einzelnen Arealen, mögen sie auch in derselben galaktischen Breite liegen, vor. Diese Abweichungen sind, von lokalen Irregularitäten abgesehen, systematischen Charakters von der Art, wie bei einer exzentrischen Lage der Sonne in einem rotationssymmetrischen Sternsystem und bei einem vorhandenen Fehler in der Lage des angenommenen galaktischen Pols zu erwarten ist.[1]

Vom Zentrum des Systems aus gesehen ist die Sternzahl nur eine Funktion der galaktischen Breite und der Größe, hat also die Form $a_c(m, b)$, während sie in bezug auf die Sonne noch von der galaktischen Länge l abhängt, also die Form $a_s(m, b, l)$ hat. Solange die Entfernung der Sonne vom Zentrum klein ist, und die Sonne sich in der Milchstraßenebene befindet, kann in erster Näherung

$$a_s(m, b, l) = a_c(m, b) + F \cos (l - L)$$

gesetzt werden, wo L die Länge des Zentrums bedeutet, während F eine Funktion von m, b und der Entfernung des Zentrums ist. Wenn die Sternzahlen des typischen Sternsystems aus in galaktischen Längen gleichmäßig verteilten Arealen bestimmt sind, stellen sie in erster Näherung die auf das Zentrum bezogenen Sternzahlen dar:

$$a(m, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_s(m, b, l)\, dl = a_c(m, b).$$

Für galaktische Breiten kleiner als 13° befriedigen die Mount Wilson-Areale nicht diese Forderung. Zwischen den Längen 190° und 350° liegen keine Areale vor. Trotz aller dieser Mängel sind die Daten in M. Wils Contr. 301 von fundamentaler Bedeutung und zur Zeit überhaupt die besten.

Die Darstellung der mittleren Sternzahlen durch die gebräuchliche quadratische Exponentialformel:

$$a(m) = e^{a + bm + cm^2} \qquad (3)$$

kann als sehr angenähert bezeichnet werden. Die Konstanten a, b, c sind für die einzelnen Zonen in Tabelle 1, die Abweichungen der angegebenen Daten von den aus (3) berechneten Werten in Tabelle 2, und zwar bei jeder Zone in der ersten Spalte festgehalten. Eine genauere Darstellung ist doch wünschenswert, da die zweiten Differenzen der Sternzahlen einen systematischen Gang aufweisen, noch mehr aber aus einem anderen Grunde.

[1] F. H. Seares: Systematic Deviations from the Mean Stellar Distribution. M. Wils. Contr. 346, Aph. Journ. 67. 1928. und F. H. Seares: Some Structural Features of the Galactic System. M. Wils. Contr. 347. Aph. Journ. 67. 1928.

Tabelle 1.

Werte der Konstanten der Funktion $a(m)$ für verschiedene galaktische Zonen.

	Zone zwischen den galaktischen Breiten			
	0°—20°	20°—40°	40°—90°	0°—90°
a	+ 0,208	— 0,615	— 1,078	— 0,237
b	+ 1,214	+ 1,310	+ 1,353	+ 1,234
c	— 0,0129	— 0,0200	— 0,0244	— 0,0152
α	+ 0,913	+ 0,276	— 0,339	+ 0,306
β	+ 0,978	+ 1,006	+ 1,100	+ 1,049
γ	+ 0,0104	+ 0,0104	+ 0,0008	+ 0,0036
δ	— 0,00070	— 0,00092	— 0,00076	— 0,0006

Seeliger glaubte die Annahme, das Sternsystem habe eine scharfe Grenze, d. h. $D(r)$ verschwinde unstetig bei einer bestimmten Entfernung R, aus den empirisch abgeleiteten Sternzahlen nachweisen zu können, indem auch für die absolute Leuchtkraft der Sterne eine obere Grenze angenommen wurde. So sind an Stelle der Gleichung (1) die zwei getrennten Gleichungen:

$$a(m) = a_1(m) = k \int_0^{10^{0,2(m-M_0)}} D(r) r^2 \varphi(m - 5 \log r) dr \text{ für } m < m_1$$

$$a(m) = a_2(m) = k \int_0^{R} D(r) r^2 \varphi(m - 5 \log r) dr \text{ für } m > m_1$$

zu setzen, wo M_0 die absolute Größe der Sterne größter Leuchtkraft bedeutet und

$$m_1 = M_0 + 5 \log R$$

ist. Differenziert man die zwei Seiten beider Gleichungen nach m, so erhält man:

$$a'(m) = a_1'(m) = k \int_0^{10^{0,2(m-M_0)}} D(r) r^2 \varphi'(m - 5 \log r) dr +$$

$$+ \frac{0,2k}{\log e} D\left(10^{0,2(m-M_0)}\right) 10^{0,6(m-M_0)} \varphi(M_0), \; m < m_1$$

$$a'(m) = a_2'(m) = k \int_0^{R} D(r) r^2 \varphi'(m - 5 \log r) dr, \; m > m_1,$$

wonach der erste Differentialquotient von $a(m)$ bei m einen Sprung vom Betrag:

Tabelle 2.

Die Differenzen zwischen den in MWC. 301. angegebenen und den nach den Formeln (3), (4) und (5) berechneten Sternzahlen. Einheit 0,001.

log $a(m)$						Zone 0°—20°			Zone 20°—40°			Zone 40°—90°			Zone 0°—90°		
m	0—20	20—40	40—90	0—90		(3)	(4)	(5)	(3)	(4)	(5)	(3)	(4)	(5)	(3)	(4)	(5)
4	2,143	1,911	1,753	1,965	4	+ 33	− 5	− 2	+ 39	− 1	− 3	+ 40	+ 4	+ 5	+ 28	+ 1	+ 1
5	2,598	2,367	2,208	2,420	5	+ 12	+ 3	+ 5	+ 6	+ 1	− 1	+ 4	− 1	0	+ 7	+ 2	+ 1
6	3,046	2,818	2,656	2,870	6	− 6	+ 4	+ 6	− 16	+ 3	+ 1	− 15	− 5	+ 1	− 7	+ 3	+ 1
7	3,489	3,262	3,098	3,312	7	− 17	+ 4	+ 5	− 27	0	+ 1	− 27	− 5	− 2	− 15	0	0
8	3,926	3,699	3,528	3,748	8	− 24	0	0	− 29	0	+ 1	− 26	+ 1	+ 1	− 17	0	− 1
9	4,359	4,123	3,940	4,175	9	− 23	− 2	− 1	− 25	− 2	− 1	− 21	0	+ 1	− 14	0	− 1
10	4,787	4,534	4,336	4,591	10	− 15	− 2	− 2	− 17	− 5	− 4	− 11	+ 2	+ 3	− 8	− 1	− 1
11	5,204	4,935	4,713	4,995	11	− 8	− 4	− 4	− 2	− 3	− 2	+ 1	+ 3	+ 4	− 2	− 2	0
12	5,611	5,320	5,069	5,388	12	+ 1	− 5	− 4	+ 15	0	+ 2	+ 13	+ 4	+ 5	+ 7	− 1	+ 1
13	6,010	5,684	5,398	5,767	13	+ 12	− 1	− 1	+ 27	+ 3	+ 4	+ 20	+ 1	+ 4	+ 14	+ 1	+ 2
14	6,394	6,023	5,700	6,127	14	+ 20	+ 3	+ 3	+ 33	+ 3	+ 4	+ 20	− 1	− 1	+ 16	+ 1	+ 2
15	6,760	6,334	5,976	6,471	15	+ 22	+ 4	+ 6	+ 29	0	0	+ 16	− 4	− 3	+ 16	+ 3	+ 3
16	7,105	6,620	6,227	6,795	16	+ 13	+ 4	+ 5	+ 16	− 2	− 1	+ 8	− 4	− 3	+ 8	+ 3	+ 4
17	7,427	6,881	6,449	7,095	17	− 7	+ 1	+ 2	− 4	− 3	+ 1	− 7	− 2	+ 1	− 10	+ 1	+ 5
18	7,726	7,115	6,643	7,373	18	− 40	− 4	− 1	− 36	+ 3	+ 7	− 30	+ 5	+ 9	− 38	− 1	+ 6

$$(a'(m)-a'(m))_{m_1+0\quad m_1-0} = (a_1')-(a_2')_{m_1\quad m_1} = \frac{0{,}2k}{\log e} D(R)R^3\varphi(M_0)$$

aufweist. Seeliger,[1] Deutschland[2] und Sametinger[3] sahen einen Beweis sogar für die Notwendigkeit der Seeliger'schen Ansätze darin, daß die Zahlen $A(m) = \int_{-\infty}^{m} a(m)dm$ nicht durchwegs durch eine einzige quadratische Exponentialformel dargestellt werden konnten, sondern daß dafür zwei getrennte Formeln dieser Art erforderlich waren.

Da es von vornherein zweifelhaft ist, ob diese Ansätze, auch abgesehen von der Unwahrscheinlichkeit einer scharfen Grenze für das Sternsystem, von praktischer Bedeutung sein können, ist es von Interesse, an Hand des neuen Materials diese Frage zu prüfen.

Betrachtet man die Darstellung der Sternzahlen $a(m)$ durch die einzige quadratische Formel (3) als ungenügend, so ist das noch keine Stütze für die Ansätze Seeligers, da es wohl andere einfache Interpolationsformeln geben kann, die eine einheitliche Darstellung für $a(m)$ und so auch für $A(m)$ ermöglichen. Wirklich gelingt die Darstellung der Sternzahlen im Intervalle $m = 4$ bis 18 durch eine einzige kubische Exponentialformel:

$$a(m) = e^{\alpha + \beta m + \gamma m^2 + \delta m^3} \tag{4}$$

mit den in Tabelle 1 angegebenen Konstanten, wie die kleinen Differenzen in den mit (4) bezeichneten Spalten der Tabelle 2 zeigen, vollständig.

Formel (4) kann in eine andere umgestaltet werden, die bei der Bestimmung der Dichtefunktion manchen Vorteil bietet. Wir können nämlich schreiben:

$$a(m) = e^{a + bm + cm^2} e^{\alpha - a + (\beta - b)m + (\gamma - c)m^2 + \delta m^3}.$$

Wir entwickeln den zweiten Faktor auf der rechten Seite in eine Potenzreihe und erhalten eine fast ebenso gute Darstellung für die Sternzahlen zwischen den Helligkeitsgrößen 4 und 18, wie durch die Formel (4), indem wir schon bei dem zweiten Glied dieser Entwicklung stehen bleiben und schreiben:

$$a(m) = e^{a + bm + cm^2}\left\{1 + (\alpha - a) + (\beta - b)m + (\gamma - c)m^2 + \delta m^3\right\}. \tag{5}$$

Die Differenzen für die einzelnen Zonen sind in Tabelle 2 in den mit (5) bezeichneten Kolumnen angeführt.

[1] Seeliger: Untersuchungen über das Sternsystem. Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wiss. zu München, 1920.

[2] Deutschland: Die Untersuchungen H. v. Seeligers über das Sternsystem. Viertelj. der A. G. 1919, Bd. 54.

[3] Sametinger: Die Grenzen des typischen Sternsystems und die Verteilungsfunktion der abs. Leuchtkräfte. Festschrift für Seeliger 1294.

Es ist wohl zu betonen, daß die oben angegebenen Interpolationsformeln (3) bis (5) nur im Intervall $m = 4$ bis 18 als gültig angesehen werden können. Der Ausdruck (4), da δ negativ ist, wächst von einem bestimmten negativen m mit abnehmendem m wieder und ist

$$\lim_{m \to -\infty} a(m) = +\infty,$$

während die Formel (5) für $m > 18$ schnell illusorisch wird.

2. Die Verteilungsfunktion der absoluten Größen.

Für die Funktion $\varphi(M)$ müssen die in der letzten Kolonne der Tabelle 71 in Gron. Publ. 38 angegebenen Werte benutzt werden, da auch die Sternzahlen $a(m)$ auf die photographische Mount Wilson-Skala bezogen sind. Die absolute Größe ist hier durch die Gleichung (2) definiert. Im Intervall $M = -8$ bis $+4$ ist eine quadratische Exponentialformel:

$$\varphi_1(M) = e^{p_1 + q_1 M + s_1 M^2} \tag{6a}$$

näherungsweise anwendbar. Da die Werte für $M = -9$ und -8 zu unsicher sind, habe ich nur die Werte zwischen -7 und $+4$ in Betracht gezogen. Die Methode der kleinsten Quadrate ergab folgende Werte für die Konstanten:

$$p_1 = -6{,}051, \quad q_1 = +0{,}339, \quad s_1 = -0{,}0869.$$

Die Werte von $\log \varphi_1(M)$ sind in der dritten Spalte der Tabelle 3 angegeben. Für $M > +3$ sind diese zu klein.

Um auch die noch einigermaßen unsicheren Werte von $\varphi(M)$ für $M > +4$ darzustellen, müssen wir zu $\varphi_1(M)$ eine andere Formel hinzuaddieren, die aber für $M < +4$ von zu vernachläßigendem kleinen Betrag sein muß. Wir versuchen der Einfachkeit halber auch für diese zweite Formel, d. h. auch für die Funktion $\varphi(M) - \varphi_1(M)$ eine quadratische Exponentialformel:

$$\varphi_2(M) = e^{p_2 + q_2 M + s_2 M^2} \tag{6b}$$

zu wählen. Für die Konstanten dieser Formel ergab die Rechnung folgende Werte:

$$p_2 = -19{,}273, \quad q_2 = +3{,}742, \quad s_2 = -0{,}2435.$$

So wird:

$$\varphi(M) = \varphi_1(M) + \varphi_2(M). \tag{7}$$

Die Zahlen, die zu $\log \varphi_1(M)$ hinzuaddieren sind, um $\log [\varphi_1(M) + \varphi_2(M)]$ zu erhalten, sind in der vierten, die nach Formel (7) berechneten Werte von $\varphi(M)$ in der fünften Kolumne der Tabelle 3 angegeben.

Tabelle 3.

Die Verteilungsfunktion der absoluten Größen.

M	Gr. P. 38.	$\log \varphi_1(M)$	$\log\left(1+\frac{\varphi_2(M)}{\varphi_1(M)}\right)$	$\log \varphi(M)$	Diff. Gr. P. — (7)
−8	(4,25−10)	(3,78−10)	—	(3,78−10)	(+0,47)
−7	4,60	4,50	—	4,50	+0,10
−6	5,05	5,13	—	5,13	−0,08
−5	5,58	5,69	—	5,69	−0,11
−4	6,19	6,18	—	6,18	+0,01
−3	6,71	6,59	—	6,59	+0,12
−2	6,88	6,93	—	6,93	−0,05
−1	7,13	7,18	—	7,18	−0,05
0	7,35	7,37	—	7,37	−0,02
+1	7,61	7,48	—	7,48	+0,13
+2	7,53	7,52	—	7,52	+0,01
+3	7,40	7,47	—	7,47	−0,07
+4	7,39	7,36	+0,04	7,40	−0,01
+5	7,55	7,16	+0,28	7,44	+0,11
+6	7,61	6,89	+0,77	7,66	−0,05
+7	7,71	6,55	+1,29	7,84	−0,13
+8	7,95	6,13	+1,75	7,88	+0,07

Die in der letzten Spalte der Tabelle 3 angegebenen Differenzen zeigen, daß durch die Formel (7) wirklich eine genäherte Darstellung für $\varphi(M)$ erreicht worden ist, die dennoch der Darstellung von $a(m)$ durch die Formeln (4) und (5) weit nachsteht.

Schreibt man $\varphi(M)$ in der Form:

$$\varphi(M) = A_1 \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 (M-M_1)^2} + A_2 \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 (M-M_2)^2},$$

so ist:

$$A_1 = +0{,}0063,\ h_1 = +0{,}295,\ M_1 = +1{,}947$$

$$A_2 = +0{,}0268,\ h_2 = +0{,}493,\ M_2 = +7{,}684.$$

Würde die Verteilungsfunktion auch für größere M dem durch die Gleichung (7) gegebenen Verlauf von $\varphi(M)$ folgen, so wären in 1000 Kubikparsec in der Nähe der Sonne

$$1000 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M)\, dM = 33$$

Sterne enthalten.

Die Integralgleichung (1) kann in unserem Fall folgendermaßen geschrieben werden:

$$a(m) = k \int_0^{+\infty} r^2 D(r) \varphi_1(m - 5 \log r)\, dr + k \int_0^{10^{0,2(m-3)}} r^2 D(r) \varphi_2(m - 5 \log r)\, dr,$$

da $\varphi_2(M)$ nur für $M > +4$ einen bemerkbaren Beitrag zu $\varphi(M)$ liefert. Über den Verlauf von $\varphi(M)$ für $M > +8$ wissen wir gar nichts; er weicht aber wahrscheinlich von $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ beträchtlich ab. Nehmen wir an, daß die wirkliche Form von φ

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

ist, wo man über φ_3 nur so viel weiß, daß sie für $M < +9$ praktisch verschwindend klein ist. Wir können also die Funktion φ folgendermaßen definieren: Sie ist gleich φ_1 bis $M = +3$, gleich $\varphi_1 + \varphi_2$ zwischen $M = +3$ und $+8$ und gleich $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ für $M > +8$. So ist:

$$a(m) = k \int_0^{10^{0,2(m-8)}} Dr^2 (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)\, dr + k \int_{10^{0,2(m-8)}}^{10^{0,2(m-3)}} Dr^2 (\varphi_1 + \varphi_2)\, dr + k \int_{10^{0,2(m-3)}}^{+\infty} Dr^2 \varphi_1\, dr$$

oder:

$$a(m) = k \int_0^{+\infty} Dr^2 \varphi_1 dr + k \int_0^{10^{0,2(m-3)}} Dr^2 \varphi_2 dr + k \int_0^{10^{0,2(m-8)}} Dr^2 \varphi_3 dr = I_1(m) + I_2(m) + I_3(m),$$

wo $I_k(m)$ das k-te Glied auf der rechten Seite bezeichnet.

Nun ist φ_3 und damit auch I_3 völlig unbekannt. Da wir uns aber ausschließlich der Sternzahlen bis $m = 18$ bedienen können, erhebt sich die Frage, ob I_3, in dem φ_3 ausschließlich vorkommt, für $m \leqq 18$ einen merklichen Betrag besitzen kann. Für $m = 18$ ist

$$I_3(18) = k \int_0^{100} D(r) r^2 \varphi_3(18 - 5 \log r)\, dr.$$

Für ein so kleines Intervall darf $D(r) = 1$ gesetzt werden. Setzt man, um einen konkreten Fall zu betrachten,

$$\varphi_3 = b(M - 8),$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$I_3(m) = kb \int_0^{10^{0,2(m-8)}} r^2 (m - 8 - 5 \log r)\, dr = \frac{5bk \log e}{9} 10^{0,6(m-8)},$$

oder:

$$\log I_3(m) = 0{,}6m - 4{,}93 + \log b.$$

Auch wenn $b = 0{,}02$ gesetzt wird, in welchem Falle man die unwahrscheinlich großen Werte $\log\varphi(9) = 8{,}18$ und $\log\varphi(10) = 8{,}62$ bekommt, ist

$$I_3(18) = 15000.$$

Eine solche Größe würde $\log a(18)$ im galaktischen Pole um 0,003 ändern, während der Einfluß von I_3 in der galaktischen Ebene nur 0,0001 wäre. Wir können daher mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß $I_3(m)$ auf die Zahlen $a(m)$ mindestens bis $m = 18$ ohne Einfluß bleibt.

Das Integral in $I_2(m)$ ist für $m = 18$ über die Entfernungen zwischen 0 und 1000 parsec zu erstrecken. Da für diese Entfernungen Werte von $D(r)$ auf einem anderen Wege von v. Rhijn bestimmt worden sind, kann I_2 direkt berechnet werden. Wir benutzen dabei die Daten in der Tabelle 13 in Gron. Publ. 38. S. 15.

Tabelle 4.

Zusatzglieder I_2. Einheit 0,001.

m	Zone				Breite			
	0°—20°	20°—40°	40°—90°	0°—90°	0°	30°	60°	90°
14	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	1	0	0	0	1	2
16	0	1	2	1	0	1	2	3
17	1	1	3	1	0	1	4	6
18	1	3	6	3	0	3	7	12

Diese sind für größere Entfernungen recht unsicher. Es kann vorkommen, daß wir später Werte für $D(r)$ erhalten, die von den v. Rhijn'schen Werten abweichen. Der Größenordnung nach sind sie aber bestimmt richtig und für unseren Zweck genügt das völlig.

Es wird eine obere Grenze für I_2 erhalten, indem $D(r) = 1$ gesetzt wird. So wird

$$I_2 < k \int_0^{10^{0,2(m-3)}} r^2 e^{p_2 + q_2(m - 5\log r) + s_2(m - 5\log r)^2} dr.$$

Die Auswertung des Integrals nach den später anzugebenden Relationen (16a) führt zum Ausdruck:

$$\log I_2 < \tfrac{3}{5}m + (4{,}418 - 10).$$

Aus dieser Formel geht hervor, daß I_2 höchstens von $m = 15$ an einen zu berücksichtigenden Betrag hat. Die direkte Auswertung von $I_2(m)$ führt zu den in Tab. 4 angeführten Zahlen. Diese sind von $\log a(m)$

abzuziehen, um $\log [a(m) - I_2(m)]$ zu erhalten. Bezeichnen wir $a(m) - I_2(m)$ mit $a_0(m)$, so kann

$$a_0(m) = k \int_0^{+\infty} r^2 D(r) \varphi_1(m - 5 \log r) dr \tag{8}$$

geschrieben werden. Da $a_0(m)$, wenn es sich überhaupt nur wenig von $a(m)$ unterscheidet, läßt es sich, ebenso wie $a(m)$, angenähert durch eine quadratische Exponentialformel oder genauer durch die Formeln (4) oder (5) darstellen.

Das Problem der Bestimmung der Dichtefunktion ist dadurch auf die Lösung der Integralgleichung (8) reduziert, wo φ_1 die quadratische Exponentialformel (6*a*) bedeutet.

3. Einige Lösungen der Integralgleichung der Stellarstatistik.

Macht man in (8) die Substitutionen:

$$y = 5 \log r \qquad \text{und}$$

$$0{,}2\, k \log \text{nat}\, 10 \cdot 10^{0{,}6y}\ D(10^{0{,}2y}) = \triangle(y) \tag{9}$$

und schreibt statt $a_0(m)$ wieder $a(m)$, und statt $\varphi_1(M)$ wieder $\varphi(M)$, so wird die Gleichung:

$$a(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle(y) \varphi(m - y) dy \tag{10}$$

erhalten. Um eine eindeutige Lösung ermitteln zu können, muß für $\triangle(y)$ Stetigkeit vorausgesetzt werden. Die Integralgrenze $+\infty$ bedeutet also nicht, daß das Sternsystem als unendlich angenommen wird. Es kann $D(r)$ von einem Werte $r = R$ ab verschwinden, nur muß das Nullwerden dabei stetig erfolgen.

Substituiert man auf der rechten Seite von (10) $m - y = x$ und schreibt dann wieder y statt x, so bekommt man die Identität:

$$a(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle(y) \varphi(m - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle(m - y) \varphi(y) dy. \tag{11}$$

Differentiert man (11) i-mal nacheinander nach m, so bekommt man:

$$a^{(i)}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle(y) \varphi^{(i)}(m - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle^{(i)}(m - y) \varphi(y) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle^{(i)}(y) \varphi(m - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle(m - y) \varphi^{(i)}(y) dy,$$

oder auch:

$$a^{(i)}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle^{(i-k)}(y)\varphi^{(k)}(m-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle^{(k)}(y)\varphi^{(i-k)}(m-y)dy, \quad (k<i).$$

Genügt also das analytische Funktionentripel $a(m)$, $\triangle(y)$ und $\varphi(y)$ unserer Integralgleichung, so gilt für das Tripel $a^{(i)}(m)$, $\triangle^{(i-k)}(y)$ und $\varphi^{(k)}(y)$ mit beliebigen i und k, oder für das Tripel:

$$\sum_{l=0}^{i} c_l a^{(l)}(m), \varphi(y), \sum_{l}^{i} c_l \triangle^{(l)}(y), \qquad (k<i)$$

wo die c beliebige Konstanten sind, dasselbe.

Genügt z. B. $a(m)$ einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, etwa der Gleichung:

$$\sum_{l=0}^{i} c_l a^{(l)}(m) = 0, \tag{12}$$

so genügt die zu suchende Lösung $\triangle(y)$ bei gegebenem $\varphi(y)$, das nicht die Gleichung (12) befriedigt, derselben Differentialgleichung. Ein solcher Fall liegt vor, wenn

$$a(m) = e^{bm} \sum_{k=0}^{i} c_k m^k \tag{13}$$

ist. Nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten genügt dann $a(m)$ einer linearen Differentialgleichung $(i+1)$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristische Gleichung b als $(i+1)$-fachen Wurzel besitzt. Die gesuchte Lösung ist danach für alle $\varphi(y)$, die nicht von derselben Form sind, wie $a(m)$:

$$\triangle(y) = e^{by} \sum_{k=0}^{i} d_k y^k, \tag{14}$$

wo die d Konstanten sind.

Nach Schwarzschild genügt das Funktionentripel:

$$\bar{a}(m) = e^{a + bm + cm^2}$$

$$\varphi(y) = e^{p + qy + sy^2}$$

$$D(y) = e^{h_0 + k_0 y + l_0 y^2}$$

bei entsprechender Wahl der Konstanten der Gleichung (10)[1].
Ist nun die Funktion $a(m)$ von der Form:

$$a(m) = \bar{a}(m) \sum_{k=0}^{i} a_k m^k,$$

[1] K. Schwarzschild: Über die Integralgleichungen der Stellarstatistik. Astr. Nachr. Bd. 185, 1910.

so kann dieselbe wegen der Relation

$$\bar{a}^{(k)}(m) = \bar{a}(m) \cdot P_k(m), \tag{15}$$

wo $P_k(m)$ ein Polynom k-ten Grades ist, bei passender Wahl der Konstanten c in der Form:

$$a(m) = \sum_{k=0}^{i} c_k \, \bar{a}^{(k)}(m) \tag{15a}$$

geschrieben werden. Nach dem oben Gesagten genügt das Funktionentripel:

$$a(m),\ \varphi(y) \text{ und } \triangle(y) = \sum_{k=0}^{i} c_k \, D_0^{(k)}(y) \tag{15b}$$

wieder der Integralgleichung. Da $D_0^{(k)}(y)$ nach der Relation (15) gleich dem Produkt von $D_0(y)$ mit einem Polynom k-ten Grades ist, können wir auch

$$\triangle(y) = D_0(y) \sum_{k=0}^{i} d_k^0 \, y^k = e^{h_0 + k_0 y + l_0 y^2} \sum_{k=0}^{i} d_k^0 \, y^k$$

schreiben, wo die Konstanten d_k^0 aus den Konstanten der Funktionen $a(m)$ und $\varphi(y)$ leicht zu bestimmen sind. Nach der Gleichung (9) muß dann die Dichtefunktion von der Form:

$$D(r) = e^{h + k \log r + l \log^2 r} \sum_{k=0}^{i} 5^k \, d_k^0 \log^k r$$

sein. Wenn z. B. nach (5)

$$a(m) = e^{a + bm + cm^2} (a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3)$$

gesetzt wird, erhalten wir für die Dichtefunktion als Lösung der Gleichung (8) den Ausdruck

$$D(r) = e^{h + k \log r + l \log^2 r} (d_0 + d_1 \log r + d_2 \log^2 r + d_3 \log^3 r). \tag{16}$$

Die Konstanten h, k und l ergeben sich aus den Relationen:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{25cs}{s-c} \qquad\qquad G = -l - 25\,s \\ k &= 5q - 6{,}908 - \frac{G(b-q)}{5\,s};\ H = k - 5q + 6{,}908 \\ h &= a - p - 2{,}520 + \frac{\log G}{0{,}8686} - \frac{H^2}{4G} \end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

(S. z. B. Mount Wilson Contributions No. 188, 1920.)

Die übrigen Konstanten der Formel (16) erhält man am einfachsten, indem man $a(m)$ auf die Form (15a) bringt. Zu diesem Zweck bilden wir die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten von $\bar{a}(m)$ bis $\bar{a}'''(m)$ einschließlich:

$$\bar{a}(m) = e^{a + bm + cm^2}$$

$$\bar{a}'(m) = \bar{a}(m) \cdot (b + 2cm)$$

$$\bar{a}''(m) = \bar{a}(m) \cdot (b^2 + 2c + 4bcm + 4c^2m^2)$$

$$\bar{a}'''(m) = \bar{a}(m) \cdot (b^3 + 6bc + (6b^2c + 12c^2)m + 12c^2bm^2 + 8c^3m^3).$$

Addiert man diese in der Reihe mit c_0, c_1, c_2 und c_3 multiplizierten Gleichungen zueinander und setzt man den erhaltenen Ausdruck gleich $a(m)$, so ergeben sich nach Gleichsetzen der Koeffizienten gleicher Potenz von m auf den beiden Seiten die Relationen:

$$\begin{aligned} a_3 &= 8c^3c_3, \qquad & a_2 &= 4c^2c_2 + 12bc^2c_3 \\ a_1 &= 2cc_1 + 4bcc_2 + (6b^2c + 12c^2)c_3 \\ a_0 &= c_0 + bc_1 + (b^2 + 2c)c_2 + (b^3 + 6bc)c_3, \end{aligned} \tag{16b}$$

woraus c_0, c_1, c_2 und c_3 leicht zu bestimmen sind. Nun ist in unserem Fall nach (15b)

$$\triangle(y) = \sum_{k=0}^{3} c_k D_0^{(k)}(y) = D_0(y) \sum_{k=0}^{3} d_k^0 y^k$$

die Lösung der Gleichung (10). Die Konstanten d_k^0 kann man aus den Gleichungen (16b) bestimmen, indem man dort d_k^0 statt a_k, l_0 statt c und k_0 statt b setzt. Drückt man die Konstanten $c_0, \ldots$ aus (16b) durch a, b, c und durch die a_k, l_0 und k_0 aus (9) durch l und k aus, so erhält man nach der Gleichung

$$d_k = 5^k d_k^0 \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

und nach einigen kleinen Umgestaltungen die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} d_3 &= -F^3 a_3, \; F = \frac{G}{5s} = -\frac{l}{5c} \\ d_2 &= -F^2 \left(a_2 + 0{,}3 \frac{H a_3}{s}\right) \\ d_1 &= F\left\{-a_1 - 0{,}2 \frac{H a_2}{s} + 0{,}03 (2G - H^2) \frac{a_3}{s_2}\right\} \\ d_0 &= a_0 + \frac{H a_1}{10s} - \frac{a_2}{100s^2}(2G - H^2) - \frac{H a_3}{1000s^3}(6G - H^2) \end{aligned}\right\} \tag{16c}$$

4. Die Dichteverteilung im typischen Sternsystem.

Nach den Formeln (16), (16a) und (16c) wurden die Konstanten der Dichtefunktion für die Zonen 0°—20°, 20°—40°, 40°—90° und 0°—90° berechnet. Tabelle 5 enthält die Resultate.

Tabelle 5.

Die Konstanten der Dichtefunktion in den einzelnen galaktischen Zonen.

	Zone			
	0°—20°	20°—40°	40°—90°	0°—90°
h	+ 1,636	− 0,073	− 1,166	+ 1,000
k	− 0,075	+ 1,093	+ 1,895	+ 0,211
l	− 0,379	− 0,649	− 0.858	− 0,460
d_0	+ 3,822	+ 5,963	+ 5,553	+ 3,380
d_1	− 3,355	− 5,753	− 5,568	− 2,913
d_2	+ 1,231	+ 2,126	+ 2,128	+ 1,110
d_3	− 0,142	− 0,252	− 0,258	− 0,134

In Tabelle 7 sind dann die Werte des Logarithmus der Dichtefunktion in einzelnen Entfernungen angegeben, und zwar für jede Zone in der ersten Kolumne immer nur die aus dem reinen quadratischen Teile erhaltenen Werte, d. h. $(h + k \log r + l \log^2 r) \log e$ und in der zweiten das Glied:

$$\log (d_0 + d_1 \log r + d_2 \log^2 r + d_3 \log^3 r).$$

In der dritten Spalte sind die Werte aus Gron. Publ. 38 S. 15 zum Vergleich angegeben.

Tabelle 6.

Die Konstanten der Funktionen $a(m)$ und $D(r)$ in den einzelnen galaktischen Breiten.

	Breite			
	0°	30°	60°	90°
a	+ 0,350	− 0,714	− 1,147	− 1,149
b	+ 1,222	+ 1,330	+ 1,361	+ 1,340
c	− 0,0127	− 0,0212	− 0,0252	− 0,0256
h	+ 1,736	− 0,377	− 1,274	− 1,128
k	− 0,043	+ 1,341	+ 1,985	+ 1,884
l	− 0,3718	− 0,7010	− 0,8875	− 0,9075

Wie aus der Tabelle 7 ersichtlich ist, haben die Abweichungen der Formel (16) von der reinen quadratischen in jeder Zone denselben Gang. Bis $\log r = 1,6$ sind dieselben positiv und noch groß, im Intervall $\log r = 1,6$ bis $2,8$ negativ, aber sehr klein, von $\log r = 2,8$ bis $3,6$ posi-

tiv und wieder sehr klein. Von $\log r = 3,8$ an (in der Spalte 0°—20° noch später) werden sie fortwährend dem absoluten Betrag nach größer. Folglich ist die Darstellung der Raumdichte für das Intervall $\log r = 1,6$ —3, 9, d. h. $r = 40 - 8000$ parsec durch die quadratische Formel völlig ausreichend.

Tabelle 7.

Verlauf der Sterndichte für verschiedene galaktische Zonen.

Entfernung r in parsec.

		0°—20°			20°—40°			40°—90°			0°—90°	
Log r	r	Log $D(r)$		Gr.P. 38.	Log $D(r)$		Gr.P. 38.	Log $D(r)$		Gr.P. 38.	Log $D(r)$	
1,0	10,0	0,51	+ 0,19	9,98	0,12	+ 0,32	0,02	9,49	+ 0,27	0,00	0,33	+ 0,16
1,2	15,8	0,40	+ 0,12	9,96	0,08	+ 0,23	9,99	9,95	+ 0,17	9,99	0,26	+ 0,10
1,4	25,1	0,34	+ 0,06	9,96	0,02	+ 0,14	9,98	9,92	+ 0,12	9,99	0,17	+ 0,05
1,6	39,8	0,24	+ 0,01	9,98	9,94	+ 0,08	9,99	9,86	+ 0,05	0,00	0,07	+ 0,01
1,8	63,1	0,12	− 0,02	0,04	9,84	+ 0,01	0,01	9,77	− 0,04	0,00	9,95	− 0,01
2,0	100	9,99	− 0,04	0,05	9,71	− 0,02	9,99	9,65	− 0,06	9,96	9,82	− 0,03
2,2	158	9,84	− 0,05	0,03	9,56	− 0,04	9,95	9,50	− 0,07	9,89	9,67	− 0,04
2,4	251	9,69	− 0,04	9,97	9,39	− 0,04	9,82	9,32	− 0,03	9,72	9,50	− 0,03
2,6	398	9,51	− 0,03	9,86	9,19	− 0,02	9,68	9,11	+ 0,01	9,50	9,32	− 0,02
2,8	631	9,33	− 0,01	9,66	8,98	− 0,01	9,45	8,87	+ 0,01	9,20	9,12	− 0,01
3,0	1000	9,13	+ 0,01	9,19	8,74	+ 0,00	9,02	8,61	+ 0,02	8,71	8,91	+ 0,01
3,2	1580	8,92	+ 0,02	—	8,47	+ 0,01	—	8,31	+ 0,02	—	8,68	+ 0,02
3,4	2510	8,70	+ 0,03	—	8,19	+ 0,03	—	7,97	+ 0,03	—	8,44	+ 0,03
3,6	3980	8,46	+ 0,03	—	7,88	+ 0,02	—	7,61	− 0,01	—	8,17	+ 0,03
3,8	6310	8,21	+ 0,03	—	7,55	− 0,01	—	7,24	− 0,05	—	7,90	+ 0,02
4,0	10000	7,95	+ 0,02	—	7,20	− 0,08	—	6,82	− 0,09	—	7,60	− 0,02
4,2	15800	7,67	− 0,03	—	6,82	− 0,18	—	6,37	− 0,21	—	7,29	− 0,07
4,4	25100	7,39	− 0,10	—	6,42	− 0,46	—	5,89	− 0,55	—	6,97	− 0,15

Da die für die Dichtefunktion erhaltenen Formeln den Nachteil haben, daß sie für kleine Entfernungen illusorisch werden und da für so große Entfernungen, wie 8000 parsec und noch größer, die berechneten Dichtewerte schon recht unsicher sein können, dürfen wir die einfache quadratische Formel für $D(r)$ benutzen. Für die galaktischen Breiten 0°, 30°, 60° und 90° sind nur die Konstanten der quadratischen Formeln für $a(m)$ und $D(r)$ berechnet und in Tabelle 6 angegeben. Wir können

also für die verschiedenen galaktischen Zonen und Breiten folgende Funktionen für $\log D(r)$ annehmen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Zone} & 0°-20° & \log D(r) = +0{,}710-0{,}033\ \log r-0{,}165\ \log^2 r \\ \text{«} & 20°-40° & \text{«} \quad -0{,}032+0{,}435\ \text{«} \quad -0{,}282\ \text{«} \\ \text{«} & 40°-90° & \text{«} \quad -0{,}506+0{,}823\ \text{«} \quad -0{,}373\ \text{«} \\ \text{«} & 0°-90° & \text{«} \quad +0{,}434+0{,}092\ \text{«} \quad -0{,}200\ \text{«} \\ \text{Breite} & 0° & \text{«} \quad +0{,}754-0{,}019\ \text{«} \quad -0{,}1615\ \text{«} \\ \text{«} & 30° & \text{«} \quad -0{,}164+0{,}582\ \text{«} \quad -0{,}3044\ \text{«} \\ \text{«} & 60° & \text{«} \quad -0{,}553+0{,}862\ \text{«} \quad -0{,}3854\ \text{«} \\ \text{«} & 90° & \text{«} \quad -0{,}490+0{,}818\ \text{«} \quad -0{,}3941\ \text{«} \end{array}\right\} \quad (17)$$

Die Werte der Dichtigkeit in den einzelnen Entfernungen und für die verschiedenen Breiten sind in Tabelle 8 angegeben und mit den von

Tabelle 8.

Werte von $\log D(r)$ in den verschiedenen galaktischen Breiten.

(Die für jede Breite in der zweiten Spalte angegebenen Zahlenwerte sind die Differenzen $\log D(r)$ — MWC 188.)

$\log r$	0°		30°		60°		90°	
	$\log D(r)$	Diff.	$\log D(r)$	Diff.	$\log D(r)$	Diff.	$\log D(r)$	Diff.
1,0	0,57	+ 0,57	0,11	+ 0,11	9,92	— 0,08	9,93	— 0,07
1,2	0,50	+ 0,50	0,10	+ 0,10	9,93	— 0,07	9,93	— 0,07
1,4	0,41	+ 0,41	0,05	+ 0,05	9,90	— 0,10	9,88	— 0,12
1,6	0,31	+ 0,31	9,99	— 0,01	9,84	0,16	9,81	— 0,19
1,8	0,20	+ 0,20	9,90	— 0,10	9,75	— 0,25	9,71	— 0,29
2,0	0,07	+ 0,07	9,78	— 0,11	9,63	— 0,22	9,57	— 0,30
2,2	9,92	— 0,08	9,64	— 0,17	9,48	— 0,29	9,40	— 0,40
2,4	9,78	— 0,22	9,48	— 0,20	9,30	— 0,30	9,21	— 0,40
2,6	9,61	— 0,29	9,29	— 0,22	9,08	— 0,27	8,98	— 0,32
2,8	9,44	0,32	9,08	0,20	8,84	— 0,18	8,71	— 0,15
3,0	9,24	— 0,32	8,84	— 0,15	8,56	— 0,04	8,42	+ 0,12
3,2	9,04	— 0,28	8,58	— 0,08	8,26	+ 0,16	8,09	+ 0,47
3,4	8,82	— 0,22	8,30	+ 0,03	7,93	+ 0,43	7,74	+ 0,93
3,6	8,59	— 0,11	7,98	+ 0,15	7,55	+ 0,72	7,35	+ 1,41
3,8	8,35	+ 0,03	7,65	+ 0,32	7,16	+ 1,09	6,93	+ 2,10
4,0	8,09	+ 0,20	7,30	+ 0,57	6,73	+ 1,50	6,48	+ 2,83
4,2	7,83	+ 0,41	6,91	+ 0,72	6,27	+ 1,97	5,97	+ 3,62
4,4	7,54	+ 0,65	6,50	+ 0,96	5,78	+ 2,50	5,48	+ 4,55

Kapteyn und van Rhijn unter denselben Annahmen erhaltenen Werten in Mount Wilson Contributions 188, 1920 verglichen. Es treten merkbare Unterschiede auf. Im allgemeinen sind die in Tabelle 8 angegebenen Dichtewerte für kleinere Entfernungen kleiner, für größere Entfernungen größer als die in MWC 188.

Tabelle 9.

Kurven gleicher Dichte und ihre Abplattungen.

$D(r)$	$\log D(r)$	0°	30°	60°	90°	Abpl.
1	0,000	125	37	—	—	—
0,40	— 0,398	387	138	91	91	4,2
0,16	— 0,796	912	488	310	256	3,5
0,063	— 1,201	2410	930	674	541	4,4
0,025	— 1,602	5750	2130	1280	1030	5,6
0,010	- 2,000	11810	3870	2280	1790	6,6
0,004	— 2,398	22830	6740	3750	2960	7,8
0,0016	— 2,796	42170	11300	6042	4680	9,0
0,00063	- 3,201	76560	17990	9230	7200	10,6

In Tabelle 9 sind für die verschiedenen Breiten die Entfernungen angegeben, in denen $D(r)$ die in der ersten Spalte derselben Tabelle vorgeschriebenen Werte besitzt. Figur 1 zeigt den Verlauf der nach dieser Tabelle gezeichneten Kurven gleicher Dichte in einer auf der Milchstraße senkrecht stehenden Ebene.

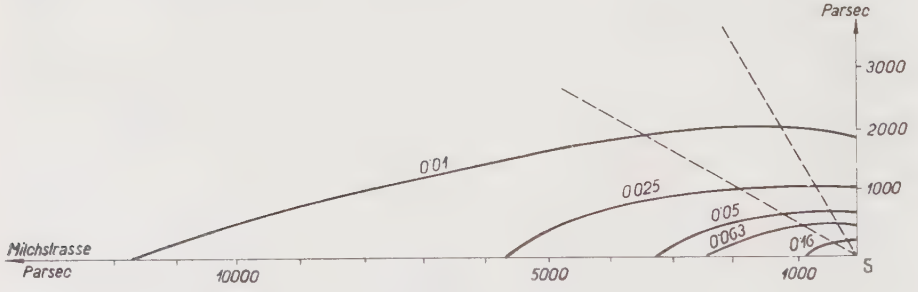


Fig. 1. Kurven gleicher Dichte.

Betrachtet man als Grenze des Lokalsystems diejenige Entfernung, in welcher $D(r) = 0{,}05$ ist, so erhält man in der Milchstraßenebene hierfür 3200 parsec und senkrecht dazu 640 parsec. Bei Kapteyn waren die

entsprechenden Werte 4500, bzw. 1000 parsec. So wäre das Sternsystem nach unseren Dichtewerten enger, als es Kapteyn gefunden hat.

Die in Tabelle 7 enthaltenen Dichtewerte geben auch darüber Aufschluß, wie die Werte von $D(r)$ von der Tatsache, daß wir die Funktion $a(m)$ nur bis $m = 18$ kennen, beeinflußt werden können. Die zwei Formeln (3) und (5), obgleich sie beide zwischen $m = 4$ und 18 näherungsweise übereinstimmende Werte ergeben, weichen voneinander für $m > 18$ beträchtlich ab. Doch stimmen die aus ihnen berechneten Dichtewerte, abgesehen von sehr kleinen Entfernungen, bis zu folgenden Entfernungen überein:

Zone	0°—20°	20°—40°	40°—90°	0°—90°	
Entfernung	17000	8000	6000	14000	ps.

Weicht also der wirkliche Verlauf der Funktion $a(m)$ für $m > 18$ von den benutzten Interpolationsformeln ab, so werden dadurch die Dichtigkeitswerte nur in sehr großen Entfernungen beeinflußt.

5. Die mittleren Parallaxen.

Als Anwendung der erhaltenen Dichtefunktionen berechnen wir die mittleren säkularen Parallaxen der Sterne verschiedener Helligkeit. Der Vergleich der aus den Dichtefunktionen abgeleiteten Parallaxenwerte mit den aus Eigenbewegungen bestimmten säkularen Parallaxen gibt zugleich Aufschluß über die Zuverlässigkeit unserer Dichtigkeitswerte.

Wenn als Entfernungseinheit das Parsec benutzt wird, so besteht zwischen der Entfernung r und der in Bogensekunden ausgedrückten jährlichen Parallaxe eines Sternes π der Zusammenhang

$$r = \frac{1}{\pi}$$

und danach ist $\pi(m)$, die mittlere jährliche Parallaxe der Sterne zwischen den scheinbaren Helligkeitsgrößen $m - \frac{1}{2}$ und $m + \frac{1}{2}$ durch die Gleichung

$$a(m) \cdot \pi(m) = k \int_0^{+\infty} r\, D(r) \varphi(m - 5 \log r)\, dr \qquad (18)$$

gegeben. Man überzeugt sich leicht davon, daß für φ einfach φ_1 gesetzt werden darf. Die hierzu nötigen Überlegungen sind dieselben, wie bei der Ableitung der Dichtefunktion angestellten. Setzt man also für $D(r)$ die Formeln (17) und für $a(m)$ die Formel (3), so wird für den Logarithmus von $\pi(m)$, wie bekannt, die Formel

$$\log \pi(m) = \pi_0 + \pi_1 m \qquad (19)$$

erhalten, wo π_0 und π_1 sich aus den Konstanten der Dichte- und Verteilungsfunktion durch die Gleichungen

$$\pi_0 = -\frac{1}{2G}(k - 5q + 5{,}757)$$

$$\pi_1 = +\frac{5s}{G} \qquad G = -l - 25\,s$$

ausdrücken lassen. Um die Parallaxenwerte mit den aus Eigenbewegungen abgeleiteten säkularen Parallaxen in Gron. Publ. 29 Table 26 vergleichen zu können, muß die durch Formel (18) gegebene $\pi(m)$ mit 4,115, entsprechend einer Sonnengeschwindigkeit von 19,5 km sec^{-1} multipliziert werden.

Die Rechnung ergibt für die verschiedenen Breiten folgende numerische Ausdrücke:

Breite	0°	$\log \pi(m) = -0{,}790 - 0{,}1708\,m$
	30°	« $-0{,}940 - 0{,}1512\,m$
	60°	« $-0{,}988 - 0{,}1420\,m$
	90°	« $-0{,}965 - 0{,}1411\,m$.

Die Werte von 4,115 $\pi(m)$ für die verschiedenen Größen und Breiten sind in der Tabelle 10 enthalten. Die für jede Breite in der zweiten Spalte angegebenen Zahlenwerte sind die Differenzen: Parallaxenwerte in Gron. Publ. minus 4,115 $\pi(m)$.

Tabelle 10.

Mittlere säkulare Parallaxe als Funktion der Größe m und galaktischen Breite b.

Breite / m	0°		30°		60°		90°	
	$\pi(m)$	Diff.	$\pi(m)$	Diff.	$\pi(m)$	Diff.	$\pi(m)$	Diff.
4	0,″1383	−0,″0538	0,″1173	−0,″0439	0,″1143	+,″00037	0,″1215	+,″00105
5	0,0933	− 0,0316	0,0828	− 0,0139	0,0824	+ 0,0035	0,0878	+ 0,0081
6	0,0630	− 0,0181	0,0585	− 0,0084	0,0594	+ 0,0031	0,0634	+ 0,0064
7	0,0425	− 0,0098	0,0412	− 0,0046	0,0428	+ 0,0028	0,0458	+ 0,0059
8	0,0286	− 0,0047	0,0291	− 0,0024	0,0309	+ 0,0024	0,0331	+ 0,0041
9	0,0193	− 0,0019	0,0206	− 0,0012	0,0223	+ 0,0019	0,0239	+ 0,0031
10	0,0131	− 0,0004	0,0145	− 0,0003	0,0161	+ 0,0016	0,0173	+ 0,0024
11	0,0088	+ 0,0004	0,0103	+ 0,0000	0,0116	+ 0,0013	0,0125	+ 0,0019
12	0,0060	+ 0,0007	0,0072	+ 0,0003	0,0084	+ 0,0010	0,0090	+ 0,0015
13	0,0040	+ 0,0009	0,0051	+ 0,0004	0,0060	+ 0,0008	0,0065	+ 0,0011

Die großen Differenzen bei den Breiten 0° und 30° für $m = 4$ bis 6 rühren meistens daher, daß die für $D(r)$ benutzten Formeln für kleine

Entfernungen illusorisch werden, und zwar wie Tabelle 8 zeigt, für $b = 0$ zwischen 10 und 100, für $b = 30$ bis 50 parsec Werte von zu großem Betrag ergeben. Daher ist auch der Gang der Parallaxen mit der Breite erst für $m > 10$ so groß, wie in Gron. Publ. 29. Besonders in dieser Hinsicht stimmen unsere Parallaxenwerte mit den aus Eigenbewegungen abgeleiteten nicht eben am besten überein, umsomehr, da nach van de Kamp (A. J. 37. 191—193. 1927.) die Abhängigkeit der Parallaxe von der galaktischen Breite in der Wirklichkeit noch stärker ist, als in Gron. Publ. 29.

6. Verteilung der einzelnen Spektralklassen.

Die bisherigen Betrachtungen sind der Annahme unterworfen, daß die Dichtefunktion von der absoluten Größe unabhängig ist. Die Sterne mit bekannter absoluter Helligkeit sind so wenig, daß eine direkte Entscheidung für die Gültigkeit oder Ungültigkeit dieser Annahme, indem man die Dichteverteilung für Sterne verschiedener absoluter Helligkeit für sich bestimmt, nicht möglich ist. Wir müssen unsere Zuflucht zu mit der absoluten Helligkeit zusammenhängenden physikalischen Eigenschaften der Sterne nehmen, wie dem Spektraltyp oder Farbenindex, die für eine unvergleichlich größere Anzahl von Sternen bekannt sind.

Drückt man den Spektraltyp irgendwie durch Zahlen, sog. Spektralindices aus, und kennt man die Anzahl der Sterne verschiedener scheinbarer Größen in einem Spektralbereich $s - ds$ bis $s + ds$, die mit $b(m, s)$ bezeichnet werden soll, weiter die Verteilungsfunktion dieser Sterne nach den absoluten Größen $\psi(M, s)$, so kann die Dichteverteilung dieser Sterne $d(r, s)$ aus der Gleichung

$$b(m, s) = k \int_0^{+\infty} r^2 \, d(r, s) \psi(m - 5 \log r, s) \, dr$$

bestimmt werden. Hier ist wieder die Annahme gemacht, daß die Funktion $d(r, s)$ von M unabhängig ist. Wenn man aber Spektraltypen betrachtet, die in absoluter Helligkeit nicht zu große Streuung aufweisen, trifft diese Annahme viel mehr zu, als für die allgemeine Dichteverteilung.

$b(m, s)$ und $\psi(m, s)$ müssen den Bedingungen genügen

$$\int b(m, s) ds = a(m), \quad \int \psi(M, s) ds = \varphi(M),$$

wo die Integration über alle s-Werte zu nehmen ist. Weiter, wenn die Dichtefunktion D wirklich von M unabhängig ist, muß noch die Relation

$$\int d(r, s) \psi(M, s) ds = D(r) \varphi(M)$$

bestehen, die identisch ist mit folgender:

$$\int \psi_M(M, s) K(r, s)\, ds = 0, \tag{20}$$

wo

$$K(r, s) = d(r, s) - D(r)\ ,\ \psi_M(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(M, s)\, dM$$

und die Integration wieder über alle s-Werte zu erstrecken ist.

Die trivialste Lösung der Gleichung (20) ist $K = O$. Alle Spektraltypen würden dann dieselbe Dichtefunktion besitzen. Bekommt man aber für die verschiedenen Spektralklassen verschiedene Dichtefunktionen, so bedeutet das noch nicht, daß D von M abhängig ist, da (20) auch noch unendlich viele andere Lösungen besitzt. So ist

$$K(r, s) = \frac{\mu(r)\,\lambda(s)}{\psi_M(M, s)},$$

w $\mu(r)$ eine beliebige Funktion von r sein kann und $\lambda(s)$ der Bedingung $\int \lambda(s)\, ds = o$ genügt, eine Lösung der Gleichung (20). Nur wenn (20) nicht erfüllt ist, hat man auf die Abhängigkeit von D von M zu schließen.

Die gegenwärtig zur Verfügung stehenden empirischen Daten reichen noch lange nicht aus, um eine solche quantitative Entscheidung für die Frage geben zu können. Alle Untersuchungen betreffs der Dichteverteilung der einzelnen Spektraltypen können höchstens auf qualitative Resultate führen.

Im folgenden versuche ich die Dichteverteilung für die Spektralklassen $B0—B5$, $B6—B9$, A, F, K und M in den Zonen zwischen den galaktischen Breiten $0°—20°$, $20°—40°$ und $40°—90°$ zu bestimmen. Hierbei nehme ich für die Sternzahlen die Angaben in Gron. Publ. 36,[1] bzw. für die B-Sterne in Gron. Publ. 38.

Diese sind aus den im Henry Draper Catalogue gegebenen Daten abgeleitet und sind höchstens bis zur 8. Größe benutzbar, da die Vollständigkeitsgrenze des Katalogs bei $m = 8,25$ liegt. In so einem kleinen Intervall der scheinbaren Größen kann fast für jede Zone und Klasse eine lineare Formel für die Logarithmen der Sternzahlen gesetzt werden:

$$\log a(m) = a + b\, m. \tag{21}$$

In diesem Falle muß die Dichtefunktion nach (14) von der Form

$$\log D(r) = h + k \log r \tag{22}$$

mit

$$k = 5b - 3$$

sein. k läßt sich also unabhängig von der Verteilungsfunktion der absoluten Größen bestimmen. Nimmt man für die Verteilungsfunktion die Formel

[1] P. J. van Rhijn: The Number of Stars between Definite Limits of Proper Motion, Visual Magnitude and Galactic Latitude for each Spectral Class. Table 1, p. 11.

$$\log \varphi(M) = p + qM + sM^2, \tag{23}$$

so ist, wie es sich aus Gleichung (16*a*) leicht ergibt

$$h = a - p + \frac{(b-q)^2}{4s} + \frac{1}{2}\log(-s) - 0{,}214.$$

Die Formel (23) stellt die von van Rhijn erhaltenen Werte der Funktion $\varphi(M)$ in Table 68 p. 71 Gr. P. 38 für die *A*- und *B*-Sterne sehr gut dar (für die *B*-Sterne hat van Rhijn die von Kapteyn erhaltenen Werte angenommen), kann aber auch auf die übrigen Klassen angewendet werden, indem bei den *K*- und *M*-Sternen nur der den Riesen entsprechende Teil von $\varphi(M)$ in Betracht zu nehmen ist, da die überwiegende Mehrzahl der im HDC vorhandenen *K*- und *M*-Sterne Riesen sind. Wie die Residuen in Tabelle 11 zeigen, stellt diese Formel die Funktion

Tabelle 11.

Die Konstanten der Formel (23) und die Differenzen: Gr. P. 38. — Formel (23).

	A	*F*	*K*	*M*
p	− 5,028	− 3,070	− 2,769	− 8,135
q	− 0,834	+ 0,078	+ 0,156	1,448
s	− 0,194	− 0,068	0,037	− 0,176
M				
—		—	+ 0,19	− 0,08
− 8		—	− 0,13	+ 0,07
− 7		+ 0,21	− 0,27	+ 0,10
− 6		− 0,06	0,06	− 0,03
− 5		− 0,20	+ 0,27	− 0,07
− 4		0,20	+ 0,23	− 0,07
− 3		0,06	− 0,23	+ 0,07
− 2		+ 0,22	—	. .
− 1		+ 0,28		.
0		+ 0,05	—	-
+ 1		− 0,22		.

S. Table 28 Gr. P. 38. p. 36

$\varphi(M)$ bei den *M*-Riesen sehr gut dar, während die Darstellung bei den *F*-Sternen und *K*-Riesen recht grob ist.

Die Konstanten der Formeln (21) und (22) sind für die verschiedenen Spektralklassen und für die Zonen 0°—20°, 20°—40° und 40°—90° in Tabelle 12, die Werte der Dichtigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Entfernung in Tabelle 13 angegeben. Der Verlauf der Dichtefunktionen ist außerdem

Tabelle 12.

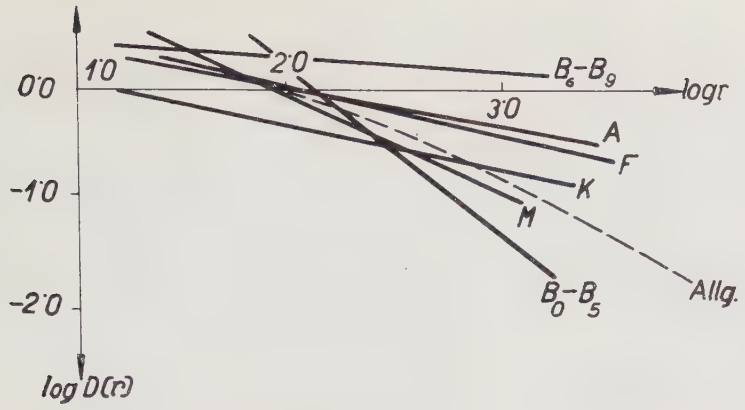
Werte der Konstanten der Formeln (21) und (22).

Spkl.	Zone	a	b	h	k
$B0-B5$	0°—20°	+ 0,64	+ 0,285	+ 3,39	1.565
$B6-B9$	0°—20°	1,15	+ 0,57	+ 0,55	0.135
	0°—20°	0.64	+ 0.543	+ 0,52	— 0.285
A	20°—40°	0.59	+ 0.500	+ 0,78	— 0,500
	40°—90°	— 0,05	+ 0.387	+ 1,85	1.065
	0°—20°	0,84	+ 0.534	+ 0,66	— 0,330
F	20°—40°	— 1,17	+ 0,577	+ 0.19	0,115
	40°—90°	— 1.28	+ 0,582	+ 0,06	0,090
	0°—20°	— 0.51	+ 0.524	+ 0,41	0,380
K	20°—40°	— 0,48	+ 0.500	+ 0,56	0.500
	40°—90°	— 0.51	+ 0,497	+ 0.54	0.515
	0°—20°	0,83	+ 0,422	+ 1,75	— 0.890
M	20°—40°	0,79	+ 0,396	+ 1.92	1,020
	40°—90°	0.51	+ 0,367	+ 2,36	— 1.165

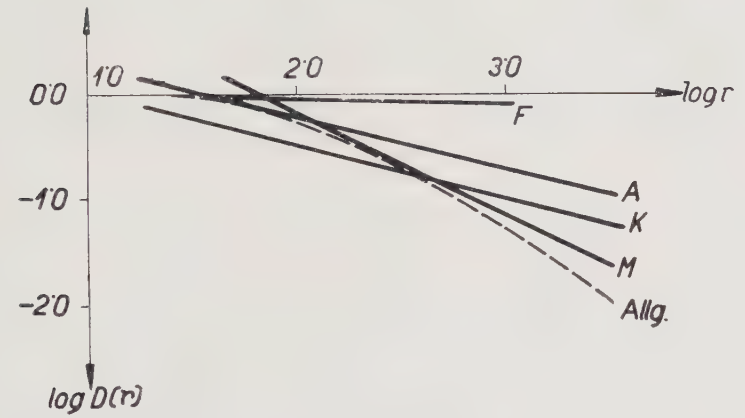
Tabelle 13.

Werte des Logarithmus der Dichte.

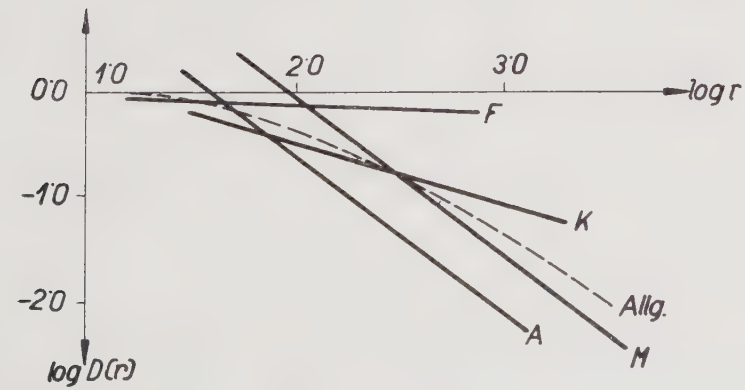
Spkl.	Zone\logr.	1,4	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9
$B0-B5$	0°—20°	1,20	0,73	0.26	— 0,21	— 0.68	— 1.15
$B6-B9$	0°—20°	0,36	0.32	0,28	0,24	— 0.20	0.16
	0°—20°	0,12	0,04	— 0,05	— 0,13	— 0,22	— 0,30
A	20°—40°	0,08	— 0,07	— 0,22	— 0,37	— 0,52	— 0,67
	40°—90°	0,36	— 0,09	— 0,54	— 0,99	— 1,44	— 1,89
	0°—20°	0,20	0,10	0,00	— 0,10	— 0,20	— 0,30
F	20°—40°	0,03	— 0,01	— 0,04	— 0,08	— 0,11	— 0,15
	40°—90°	— 0,07	— 0,09	— 0,12	— 0,15	— 0,17	— 0,20
	0°—20°	— 0,12	— 0,23	— 0,33	— 0,46	— 0,58	— 0,69
K	20°—40°	— 0,14	— 0,29	— 0,44	— 0,59	— 0,74	— 0,89
	40°—90°	— 0,18	— 0,34	— 0,49	— 0,65	— 0,80	— 0,96
	0°—20°	0,50	0,24	— 0,03	— 0,30	— 0,57	— 0,83
M	20°—40°	0,50	0,19	— 0,12	— 0,42	— 0,73	— 1,04
	40°—90°	0,72	0,38	0,03	— 0,33	— 0,68	— 1,38



Zone 0°–20°



Zone 20°–40°



Zone 40°–90°

Fig. 2.

auch in Figur 2 dargestellt und mit der allgemeinen Dichteverteilung verglichen. Für die G-Sterne habe ich die Dichteverteilung nicht für sich bestimmt, da diese mit der der F-Sterne identisch angenommen werden darf. B-Sterne gibt es außerhalb der Milchstraße sehr wenig, für sie ist daher die Dichteverteilung nur in der Zone 0°—20° bestimmt.

Die erhaltenen Dichtewerte sind natürlich sehr unsicher und nur in einem sehr engen Entfernungsintervall roh zutreffend. Besonders ist die Konstante h sehr unsicher. Für die Frage der Abhängigkeit der Dichtefunktion von M sind glücklicherweise nur die Werte von k von Wichtigkeit. In der Tabelle 14 sind daher die Werte von k für die verschiedenen Spektralklassen und Zonen mitsamt der mittleren absoluten Größe des betreffenden Spektraltyps nochmals angeführt.

Tabelle 14.

Werte von k und mittlere absolute Größe $\overline{M}$ für die verschiedenen Spektralklassen.

Spkl.	0°—20°	20°—40°	40°—90°	$\overline{M}$
$B0-B5$	—1,565	—	—	—4,5
$B6-B9$	—0,135	—	—	—2,3
A	—0,285	—0,500	—1,065	—2,8
F	—0,330	—0,115	—0,090	—0,7
K	—0,380	—0,500	—0,515	—3,7
M	—0,890	—1,020	—1,165	—4,0

Mit Ausnahme der F-Sterne nimmt k für jede Klasse mit wachsender galaktischer Breite ab, d. h. nimmt die Dichtigkeit mit zunehmender Entfernung für jede Klasse außer F in höheren galaktischen Breiten schneller ab, als in der Milchstraße. Die Ausnahmestellung der F-Sterne bedeutet nicht viel, da die Dichtewerte für sie wegen ihrer geringen Leuchtkraft schon in kleinen Entfernungen zu unsicher werden.

In der Zone 0°—20° scheint k in den Klassen $B0-B5$, M und K mit abnehmender absoluter Größe kleiner zu werden. Für die übrigen Klassen, wo auch die mittlere Größe im allgemeinen größer ist, ist auch k größer, obgleich hier dieser Gang von k mit M nicht mehr zu erkennen ist. In den übrigen Zonen beschränkt sich dieser Zusammenhang auf die Klassen F, K und M. Shajn, der für die Spektraltypen A bis F eine sehr detaillierte Einteilung vorgenommen hat ($0-B0, B1, B2, B3, B5, B8, B9, A0, A2, A3, A5, F0-F2$) und die Dichteverteilung unter Annahme gleicher absoluter Leuchtkraft innerhalb jeder Subklasse bestimmt hat,[1] fand für

[1] G. Shajn: On the Distribution in Space of Stars of the Henry Draper Catalogue down to 8.25 magnitude. Astr. Nachr. 232, 5546, 1928. S. 17—36.

diese Folge sowohl in der Milchstraßenzone (bei Shajn zwischen den Breiten 0° bis 34°), wie in der außergalaktischen (34°—90°), daß die Dichte um so schneller nach außen abnimmt, je größer die absolute Helligkeit der Sterne in der betreffenden Klasse ist. Es ist daher wahrscheinlich, daß die Dichtefunktion in dem Sinne von M abhängt, daß sie für kleinere Werte von M mit zunehmender Entfernung schneller abnimmt als für größere. Diese Erscheinung ist in gleicher Weise bei den Sternhaufen vorhanden. Die helleren Sterne eines Haufens zeigen große Konzentration gegen die Mitte hin. (S. T. Bruggencate: Sternhaufen, 1927.)

Es gibt auch theoretische Gründe dafür, daß die durchschnittliche Masse der Sterne in einem Sternsystem nach außen abnimmt.[1] Da die absolute Helligkeit der Sterne nach Eddington hauptsächlich durch ihre Masse bestimmt ist, so würde man hieraus ebenfalls auf eine Abnahme der durchschnittlichen absoluten Helligkeit der Sterne mit zunehmender Entfernung schließen können. Van Rhijn hat dieselbe Erscheinung bei der Ableitung der Verteilungsfunktion $\varphi(M)$ gefunden (Gron. Publ. 38. p. 11.), doch hat er sie durch die Annahme, daß die dabei benutzten mittleren Parallaxen fehlerhaft seien, größtenteils eliminieren können (p. 12).

Statt der Integralgleichung (1) muss also

$$a(m) = k \int_0^\infty r^2 D(r, m-5\log r)\varphi(m-5\log r)\, dr$$

geschrieben werden. In diesem Falle kann aber keine eindeutige Lösung für die Dichtefunktion erhalten werden. Man muß sich auf die Bestimmung der Dichteverteilung von betreffs absoluter Leuchtkraft homogenen Sternklassen beschränken.

Eine Folge der oben angedeuteten Abhängigkeit der Dichtefunktion von M ist, daß die Dichtigkeit in Wirklichkeit mit zunehmender Entfernung langsamer abnimmt, wie die bei Annahme der Unabhängigkeit von M abgeleitete. Eine andere Folge wäre, daß man, wenn die Verteilungsfunktion $\varphi(M)$ in verschiedenen nach galaktischen Längen getrennten Zonen abgeleitet werden würde, in der Richtung des Zentrums des Lokalsystems eine größere prozentuale Häufigkeit der absolut hellen Sterne bekommen würde, als in der entgegengesetzten Richtung.

7. Anwendung von Farbenindices und die Entfernung der Auriga-Wolke.

Durch das typische Sternsystem ist nur ein sehr allgemeines Bild der Verhältnisse dargestellt. Es gibt schon eine große Reihe von Abhandlungen, die zum Ziel haben, die Einzelheiten des Sternsystems zu erforschen.

[1] J. H. Jeans: Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. 1919. p. 238—239.

Hierbei muß man die bei dem typischen Sternsystem gemachten Annahmen auch auf die einzelnen Teile des Sternsystems übertragen, was oft die erhaltenen Resultate vollständig illusorisch macht. Solange man sich nur auf die Bestimmung der scheinbaren Größe der Sterne beschränkt und nicht auch andere physikalische Eigenschaften mitbestimmt, lohnt es sich kaum von der scheinbaren Verteilung auf die räumliche überzugehen. Besonders oft werden die Resultate in der Milchstraße illusorisch. Es scheint ziemlich unzweifelhaft, daß das Phänomen der Milchstraße hauptsächlich aus reellen Konzentrationen von Sternen, sogenannten Sternwolken aufgebaut ist. Die Sternzahlen in einigen Selected Areas, wie in den Areas 64, 41, 39, 40, 63 und 65 in der Cygnuswolke, 134 und 135 am Rande der Scutumwolke, 133 im Ophiuchus deuten schon auf das Einsetzen der Wolkensterne bei den 14. bis 16. Größen hin. Dieser Umstand beeinflußt natürlich auch die Sternzahlen des typischen Sternsystems, obgleich er durch stark absorbierte Areas einigermaßen kompensiert wird. Um auch die Entfernung und die Struktur dieser Wolken nach den allgemeinen statistischen Methoden erfassen zu können, ist zuerst die Abtrennung der Wolkensterne von den Vordergrundsternen des Lokalsystems erforderlich, was auf Grund der scheinbaren Größen allein kaum möglich ist. Dann muß aber auch vorausgesetzt werden, daß die Häufigkeitsfunktion in den Milchstraßenwolken dieselbe ist, wie diejenige in der Umgebung der Sonne. Versuche dieser Art von A. Pannekoek[1] führten, wie A. Kopff[2] gezeigt hat, zu erheblich zu großen Entfernungen.

Da der Spektraltyp nur für verhältnismäßig helle Sterne zu bestimmen ist, muß er, um auch die schwachen Sterne in Betracht ziehen zu können, durch den Farbenindex ersetzt werden.

Malmquist hat versucht, die für die Farbenindices vorhandenen Daten auf die Bestimmung der räumlichen Dichteverteilung der Sterne anzuwenden.[3] Dabei hat er die Sterne zwischen den Farbenindices 0,00 und 0,24 ausgewählt, da diese im allgemeinen sehr große absolute Leuchtkraft besitzen, so daß man imstande ist mit ihrer Hilfe in sehr große Entfernungen vorzudringen. Nachdem für die Dichtefunktion die von Charlier für die *B*-Sterne gefundene Form

$$D(r) \quad D_0 e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma^2}}$$

angenommen wurde, ermittelt Malmquist die Häufigkeitsfunktion dieser

[1] A. Pannekoek: The Distance of the Milky Way. Monthly Not. 79. 1919.

[2] A. Kopff: Über Häufigkeitsfunktion und Entfernung in den hellen Milchstraßenwolken. Astr. Nachr. 216, 325, 1922.

[3] K. G. Malmquist: A Method of Determination the Arrangement in Space of Stars. Kungl. Svenska Vet. Handl. 4. N:0 2, 1927. Festkrift for Charlier.

Sterne auf eine sehr bedenkliche Art. Er erhält für die Verteilungsfunktion der scheinbaren Größen im offenen Haufen Messier 37 eine Kurve mit zwei Maxima. Das Intervall zwischen den beiden Maxima beträgt 1,6, die Dispersion 0,95 *Mg*. Der Form nach stimmt diese Verteilungskurve, da alle Sterne des Haufens praktisch als in der gleichen Entfernung liegend betrachtet werden können, mit der Häufigkeitsfunktion überein. Indem nun Malmquist dieselbe Kurve auch für die Auriga- und Scutumwolke und für die Gegend des nördlichen galaktischen Pols ableitete und in jedem Falle eine ähnliche Kurve erhielt, schließt er, daß die Form der Häufigkeitsfunktion der Sterne mit Farbenindices zwischen 0,00 und 0,24 in den Sternhaufen, in den galaktischen Wolken und im Lokalsystem dieselbe ist. So können zum Übergang von scheinbarer zu absoluter Verteilungskurve Sterne bekannter absoluter Helligkeit des Lokalsystems benutzt werden.

Diese Folgerung ist mindestens in dieser Allgemeinheit bestimmt unhaltbar. Die zwei Maxima bei Messier 37, wie ein Blick auf das Farbenhelligkeitsdiagramm in Bruggencate: Sternhaufen S. 131 lehrt, entstehen dadurch, daß die in Betracht kommenden Sterne teils dem Riesenast, teils dem Zwergast angehören. Das Maximum bei $m = 12{,}4$ entspricht dem Riesenast, das bei 13,8 dem Zwergast.

Nun sind die Farbenhelligkeitsdiagramme der offenen Haufen von einem Haufen zum anderen beträchtlich verschieden. Trümpler unterscheidet vier Haupttypen.[1] Bei dem Typus 2*f* kommen *b*- und *a*-Sterne überhaupt nicht vor, beim Typus 1*b* sind alle Sterne von Farbenindex 0,00 bis 0,24 Zwerge, in diesem Haufen kann also die Häufigkeitsfunktion nur ein Maximum besitzen. Allein die Haufen von den Typen 1*a* und 2*a* können für diese Sterne eine Häufigkeitsfunktion mit zwei Maxima haben, da bei diesen ebenso Zwergsterne, wie Riesensterne in dem betrachteten Farbenindexintervall vorhanden sind. Der Haufen Messier 37 ist vom Typ 2*a*. Es ist aber überhaupt nicht notwendig, daß die Häufigkeitsfunktion bei diesen Haufen in allen Fällen mit der in Messier 37 übereinstimmt. So ist z. B. Messier 11 ein offener Haufen von demselben Typ, wie Messier 37, doch hat die Häufigkeitsfunktion der betreffenden Sterne hier nur ein Maximum, da die Loslösung der zwei Äste in diesem Haufen eben bei den Farbenindices 0,20 bis 0,30 stattfindet, so daß nur die Sterne mit einem größeren Farbenindex eine Häufigkeitsfunktion mit zwei Maxima besitzen können.

Da die Methode ihre wichtigsten Anwendungen bei den Milchstraßenwolken findet, ist es von Interesse, die Gültigkeit der Malmquistschen Behauptung bei diesen Gebilden näher zu untersuchen. Daher wurde ein Farbenhelligkeitsdiagramm für die Auriga-Wolke entworfen.

[1] Trümpler: Spectral Types in Open Clusters. Publ. Astr. Soc. Pac. 37, 1925.

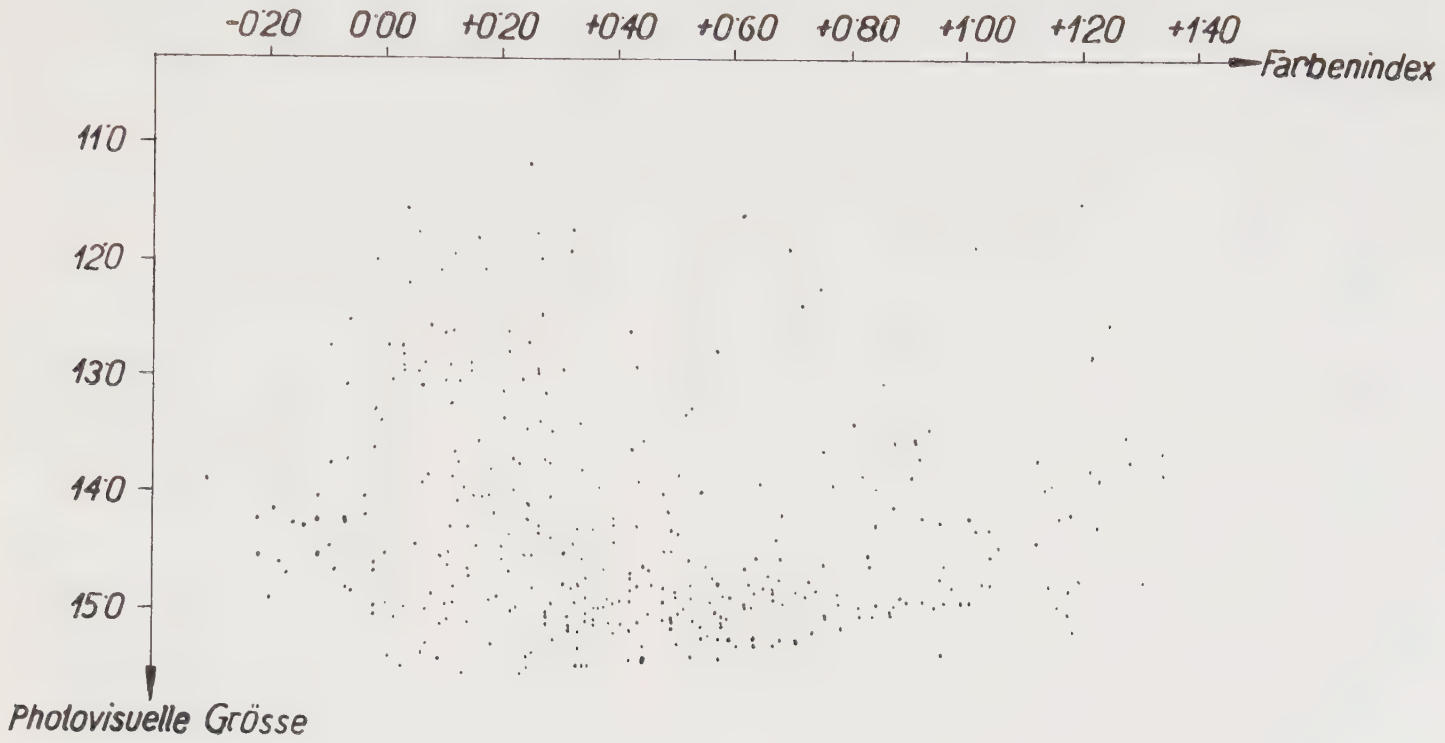

-0·20
0·00
+0·20
+0·40
+0·60
+0·80
+1·00
+1·20
+1·40
Farbenindex
11·0
12·0
13·0
14·0
15·0
Photovisuelle Grösse

Fig. 3.

(S. Fig. 3.) Als Material dienten die Angaben von H. v. Zeipel und J. Lindgren.[1]

Der untersuchte Haufen liegt in der Auriga-Wolke und die Abzählungen in den konzentrischen Ringen, in die das untersuchte Feld eingeteilt wurde, zeigen in den drei äußersten Ringen pro Flächeneinheit dieselbe Sternzahl, woraus gefolgert werden kann, daß die in diesen Ringen enthaltenen Sterne hauptsächlich der Auriga-Wolke angehören.

Das Farbenhelligkeitsdiagramm der Wolke ist in Figur 3 dargestellt. Es unterscheidet sich wesentlich von dem des Haufens Messier 37. Unter den zwei Maxima der Verteilungskurve der Sterne mit Farbenindex zwischen 0,00 bis 0,24 scheint das zweite dem Riesenast zu entsprechen, während das erste wahrscheinlich von Sternen mit sehr hoher absoluter Leuchtkraft gebildet ist. Ist in der Wolke auch noch der Zwergast ausgebildet und löst er sich bei einem negativen Farbenindex vom Riesenast, so besitzt die Häufigkeitsfunktion der in Frage kommenden Sterne sogar drei Maxima. Die Behauptung von Malmquist ist also auch bei den Milchstraßenwolken, wenigstens bei der Auriga-Wolke nicht zutreffend. Dieser Umstand macht seine Resultate auch der Größenordnung nach sehr unsicher. Was die Entfernung der Auriga-Wolke betrifft, können wir nach dem vorigen mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß der von Malmquist angegebene Wert, 2900 parsec, zu klein ist. Die Übergiganten des Lokalsystems sind von der absoluten Größe $= -7$ bis -9. Da das erste Maximum der Verteilungskurve der Sterne mit Farbenindex 0,00 bis 0,24 bei der Sterngröße 12,8 liegt, so bekommen wir für die Entfernung des Zentrums der Auriga-Wolke, indem wir annehmen, daß diese Sterne dieselbe absolute Größe haben, wie die Übergiganten des Lokalsystems und in der Formel

$$\log r = 0{,}2(m - M)$$

$m = 12{,}8$ und $M = -8$ setzen, $\log r = 4{,}16$ und $r = 14000$ parsec.

Berlin, Mai 1929.

[1] Photometrische Untersuchungen der Sterngruppe Messier 37. (NGC 2099.) Kungla Svenska Vet. Handl. 61, N:o 15, 1921.

Meinem hochverehrten Lehrer, Professor *Dr. August Kopff* bin ich zum tiefsten Dank verpflichtet für die selbstlose Unterstützung und die stete Aufmerksamkeit, mit der er meine Entwicklung förderte.

Lebenslauf.

Ich wurde am 19. April 1906 in Szombathely (Ungarn) geboren. Hierselbst besuchte ich das humanistische Gymnasium. Im Jahre 1924 bestand ich die Reifeprüfung und ging nach Budapest, um an der Pázmány Péter-Universität Mathematik und Physik zu studieren. Nach zweieinhalbjährigem Studium wurde ich als Staatsstipendiat nach Berlin gesandt, um mich in der Astronomie auszubilden. Hier arbeitete ich zweieinhalb Jahre unter der Leitung der Herren Professoren Dr. A. Kopff und Dr. P. Guthnick.